

附：

胡景北工资—物价图的数学证明

胡景北

(www.hujingbei.net, www.hujingbei.blog.sohu.com)

(jbeihu@mail.tongji.edu.cn)

胡景北的工资—物价图建立在一个数学模型上。为证明这个模型，我们有如下假定：

- 1) 二部门或二产品经济。其中一个部门生产食品（农产品、农业部门），另一个部门生产其它产品，根据下面的假设 2)，我们称它为现代部门。
- 2) 二元经济或二种经济制度的经济。农业部门实行的是前资本主义经济制度，其标志是工资决定不遵循边际原则。现代部门实行的是新古典经济制度，工资由边际生产率决定。
- 3) 农业实行自耕农制度，工资由劳动的平均生产率决定。
- 4) 两个部门的生产皆使用资本和劳动。农业部门并且使用土地。假设土地为常数，因此不明确出现在研究中。
- 5) 两个部门的生产函数都符合新古典经济学要求的 Inada 条件。
- 6) 人口总量给定且充分就业。
- 7) 资本总量和部门配置给定。
- 8) 农产品仅用于消费，现代产业产品可用于消费或投资。
- 9) 用于农产品消费的收入是总收入的一个固定比率 c 。
- 10) 实物经济，不考虑货币的作用。

依据上述假设，我们建立一个经济模型如下：

- A1) $Y = pY_1 + Y_2$
- A 2) $Y_1 = f_1(K_1, L_1)$
- A 3) $Y_2 = f_2(K_2, L_2)$
- A 4) $w_1 = f_1/L_1$
- A 5) $w_2 = df_2/dL_2$
- A 6) $pw_1 = w_2$
- A 7) $pY_1 = cY$
- A 8) $L = L_1 + L_2$
- A 9) $L = L^*$
- A 10) $K_1 = K_1^*$
- A 11) $K_2 = K_2^*$
- A 12) $c = c^* \quad (1 > c > 0)$

其中下标 1、2 分别表示农业和现代产业（注意：图中的符号标示有所不同），上标*表示常数。我们的经济体系由 12 个方程组成。它们将决定 12 个变量：Y（总

产值或总收入), Y_1 (农业产值), Y_2 (现代部门产值), K_1 (农业资本投入), K_2 (现代部门资本投入), L (人口或劳动力总量), L_1 (农业劳动投入) L_2 (现代部门劳动投入), w_1 (农业工资), w_2 (现代部门工资), p (以现代部门产品为单位计算的价格), c (用于农产品消费的收入占总收入的比重)。各个变量的含义和正文定义相同。在它们中, K_1 , K_2 , L 和 c 四个变量外生决定, Y , Y_1 , Y_2 , L_1 , L_2 , w_1 , w_2 和 p 八个变量必须在模型内决定。其中, K_1 , K_2 在数学上没有意义。引入它们只是为了强调资本对生产函数形状的决定作用。

各个方程的意义是:

- A1) 总产值决定, 其中的 p 是相对价格, $p = p_1/p_2$ 。
- A2) 农业产值决定
- A3) 现代产业产值决定
- A4) 农业工资决定
- A5) 现代产业工资决定
- A6) 工资均衡 (劳动市场均衡条件)
- A7) 农业产量供求平衡 (产品市场均衡条件)
- A8) 充分就业假设
- A9) 及以下: 数量约束和参数假设

显然, 这个模型和胡景北 1994 年的模型几乎完全相同。重要的区别仅仅在于它把胡景北 1994 年模型中的 p 从常数变成了变量, 并为 p 的决定增加了方程 A7)。因此, 这里的模型可以视为胡景北 1994 年模型的一种扩展, 即将它从一个仅仅包括劳动市场的模型扩展为同时包括了产品市场的模型。

上面的模型中, f_1 、 f_2 为满足 Inada 条件的新古典生产函数。为求解这个模型, 我们考虑劳动市场和产品市场的均衡条件 A6) 和 A7)。把 A1) 代入 A7), A7) 可改写为

$$pY_1 = c(pY_1 + Y_2) = cpY_1 + cY_2$$

合并同类项得

$$(1 - c)pY_1 = cY_2$$

整理得到

$$A21) \quad p = [c/(1 - c)]*(Y_2/Y_1)$$

把 A21) 和 A4) 代入 A6), 我们有

$$A22) \quad [c/(1 - c)]*(Y_2/Y_1)*(Y_1/L_1) = df_2(K_2, L_2)/dL_2$$

令

$$k = c/(1 - c) > 0$$

代入并整理 A22), 同时考虑 A8) 我们得到

$$A23) \quad k*f_2(K_2, L_2)/(L - L_2) = df_2(K_2, L_2)/dL_2$$

方程 A23) 中仅仅有一个变量 L_2 , 所以应当是可决定的。设想一个函数 G

$$A24) \quad G = k*f_2(K_2, L_2)/(L - L_2) - df_2(K_2, L_2)/dL_2$$

如果 L_2 的某个和某些值使得 A24) 的 $G = 0$, 那么, 这个或这些值也是 A23) 的解。因此我们仅仅观察 A24)。由于 f_2 是新古典生产函数, f_2 连续且至少二次可微, 所以 G 是连续且至少一次可微的函数。对 G 求导得

$$\begin{aligned} dG/dL_2 &= k*[df_2(K_2, L_2)/dL_2]/(L - L_2) + k*f_2(K_2, L_2)/(L - L_2)^2 \\ &\quad - df_2^2(K_2, L_2)/dL_2^2 \\ &= R + S - T \end{aligned}$$

其中，由于 R 和 S 的分子项与分母项皆大于零，所以 $R > 0$ 。 $S > 0$ 。 T 是 f_2 的二阶导数。由 Inada 条件知 f_2 的二阶导数小于零，所以 $(-T) > 0$ ，因此我们有

$$A25) \quad dG/dL_2 > 0$$

A25) 表明 G 是 L_2 的单调函数。从图形上看， G 是图 A1 中一条从左下方向右上方倾斜的曲线。为简便起见且不失一般性，我们在图 A1 中把 G 绘成一条直线。

现在我们需要证明 G 的图形在 L_2 的定义域内过横轴。由 A8) 知 L_2 的定义域是

$$A26) \quad L \geq L_2 \geq 0$$

把 A24) 改写成

$$G = k \cdot A/B - C$$

考虑 $L_2 \rightarrow 0$ ，我们有

$$A = f_2(L_2 \rightarrow 0) \rightarrow 0$$

$$B = L - L_2 \rightarrow L$$

$$C = df_2(K_2, L_2)/dL_2 \rightarrow \infty$$

所以，在 $L_2 \rightarrow 0$ 时

$$G = k \cdot A/B - C \rightarrow -\infty$$

考虑 $L_2 \rightarrow L$ ，我们得到

$$A = f_2(L_2 \rightarrow L) \rightarrow I \quad (I \text{ 是很大的有限数})$$

$$B = L - L_2 \rightarrow 0$$

$$C = df_2(K_2, L_2)/dL_2 \rightarrow J \quad (J \text{ 是很小的有限数})$$

所以，在 $L_2 \rightarrow L$ 时

$$G = k \cdot A/B - C \rightarrow \infty$$

综合这两方面的考虑，我们可以说在 L_2 从 0 到 L 的连续的定义域内， G 将从负数变成正数，因此至少有一个 $L_2 = L_2^{\sim}$ 使得 $G = 0$ 。在图 A1 中，直线 G 将在 L_2 的定义域内与横轴相交。所以， G 等于零的解 L_2^{\sim} 是存在的， L_2^{\sim} 同时是令 A23) 式的等号两边相等的解。

考虑到 G 的单调性，直线 G 将仅仅在 L_2 的定义域内与横轴相交一次，所以， L_2^{\sim} 是 G 等于零的唯一解，也是令 A23) 成立的唯一解。

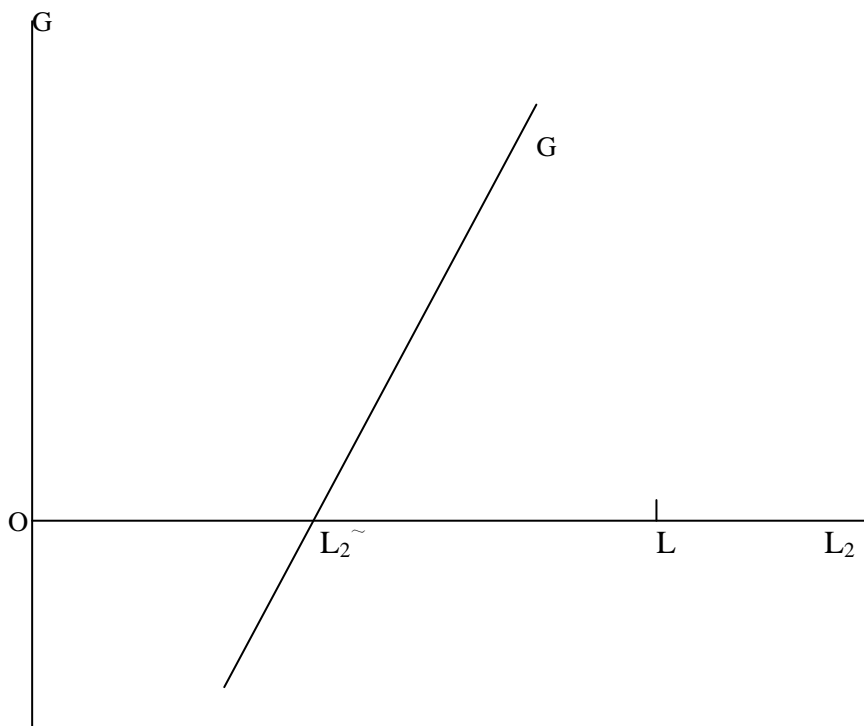


图 A1 解的存在性和唯一性

把 L_2^{\sim} 代入到 A3)、A5) 和 A8) 并考虑诸常数假设方程, 得到解 Y_2^{\sim} 、 w_2^{\sim} 和 L_1^{\sim} 。把 L_1^{\sim} 代入到 A2)、A4) 得到 Y_1^{\sim} 和 w_1^{\sim} 。把 w_1^{\sim} 、 w_2^{\sim} 代入到 A6), 得到 p^{\sim} 。最后, 把 p^{\sim} 、 Y_1^{\sim} 和 Y_2^{\sim} 代入到 A1) 或把 p^{\sim} 、 Y_1^{\sim} 代入到 A7), 得到 Y^{\sim} 。体系中所有内生变量都有解。由于体系内各个函数的单调性, 所以各个变量的解都是唯一解, 它们共同构成了体系的唯一一组解。

在胡景北的工资—物价图中,

A2) 是从左原点引出的农业生产函数或者农业产值曲线。

A3) 是从右原点引出的现代部门生产函数或产值曲线。

A1) 作为总产值曲线没有出现在图中。它应当是从右纵轴上某一大于零的点引出的向左上方并偏上延伸的曲线, 表示随着劳动力向现代部门转移, 社会的总产值不断上升。在劳动力配置的每一个横轴点上, A1) 在纵轴的取值是 A2) 和 A3) 相应于该点的纵轴值之和。

A4) 是夹角 a , 表示农业工资。

A5) 是夹角 b , 表示现代部门工资。

A6) 表示在均衡点 A 上, 夹角 $a = \text{夹角 } b$, 两部门工资相等。

A7) 中的 cY 是图中的农产品需求曲线。由于 Y 从右纵轴的某个点向左上方偏上延伸, 农产品需求曲线也从右纵轴的某个点向左上方延伸, 但比 Y 平缓得多。

A7) 表示在均衡点 A 上, 农产品需求曲线和农业产值曲线相交, 农产品供求相等。

A8) 在横轴上, 两个部门的劳动投入相加等于社会的劳动总投入。

A9) 表示横轴的长度有限。

A10) 表示在 p 不变时，农业产值曲线的形状

A11) 表示现代部门产值曲线的形状。

A12) 表示在总收入一定时，农产品需求是一条直线。

我们的模型证明，图中的均衡点 A 是存在的，农产品供求平衡和劳动力供求平衡可以同时出现，价格和工资可以达到稳定的均衡。

2008 年 1 月 30 日